Domácí úkol ze cvičení 8:

1. Dokažte následující tvrzení :

   a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, $a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, $a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Pomocí tvrzení v příkladu 1

   a) dokažte (znovu): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x \in R$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$;

   b) vyšetřete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$ $(a > 1)$.

3. Užitím věty o limitě monotonní posloupnosti

   a) dokažte (znovu) : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $q \in (-1,1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$;

   b) ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, definujeme-li posloupnost $\{a_n\}$ rekurentně takto :

      $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.